２次試験直前チェック

確率と漸化式の融合問題に挑戦！

> 正四面体ＡＢＣＤの頂点を移動する点Ｐがある。点Ｐは、１秒ごとに、隣の３頂点のいずれかに等しい確率 $\dfrac{a}{3}$ で移るか、もとの頂点に確率 $1-a$ で留まる。初め頂点Ａにいた点Ｐが、ｎ秒後に頂点Ａにいる確率を p_n とする。ただし、$0<a<1$ とし、ｎは自然数とする。
>
> (1) 数列 $\{p_n\}$ の漸化式を求めよ。
>
> (2) 確率 p_n を求めよ。　　　　（北海道大学・文系）

［考え方］この手の問題を解く際には、まず p_1 を求め、その後 p_2, p_3 と求めて帰納的に考えたくなるが、これをやってはいけない（様子見のためにやる分には良い）。(1)では漸化式を訊かれているので、p_n と p_{n+1} との関係式を導くことになる。具体的には、ｎ番目（この場合にはｎ秒後）までの物事が「既に終了している」ところからスタートする。もう少し詳しく言えば、ｎ＋1番目（p_{n+1}）にたどり着くためには、その１つ前のｎ番目でどうなっているのかを考える。すると、（ⅰ）ｎ番目で点Ａにいる（ⅱ）ｎ番目で点Ａ以外にいる、の２つの場合が考えられることが分かる。なお、①式は、隣接２項間の漸化式なので、文字が含まれていても、戸惑うことなく最後の第ｎ項まで導けるようにしておく必要がある。

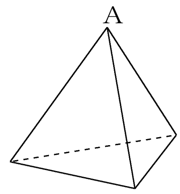
［解答例］

(1) ｎ＋1秒後に点Ｐが点Ａにいるのは

（ⅰ）ｎ秒後に点Ｐが点Ａにいて、ｎ＋1秒後に点Ａにいる

（ⅱ）ｎ秒後に点Ｐが点Ａ以外の頂点にいて、ｎ＋1秒後に点Ａにいる

のいずれかの場合である。



（ⅰ）について

ｎ秒後　→　ｎ＋1秒後

点Ａ　　　　点Ａ

p_n　　$\times(1-a)$

ｎ秒後に点Ｐが点Ａにいる確率は p_n であり、その後同じ点Ａに留まるので、

このときの確率は　$p_n\times(1-a)$

（ⅱ）について

ｎ秒後　→　ｎ＋1秒後

点Ａ以外　　点Ａ

$(1-p_n)$　　$\times\dfrac{a}{3}$

ｎ秒後に点Ｐが点Ａ以外にいる確率は $1-p_n$ であり、その後別の点Ａに移動するので、

このときの確率は　$(1-p_n)\times\dfrac{a}{3}$

（ⅰ）と（ⅱ）は互いに背反だから、ｎ＋1秒後に点Ｐが点Ａにいる確率 p_{n+1} は

$$p_{n+1}=(1-a)p_n+\frac{a}{3}(1-p_n)$$

$$\therefore\ p_{n+1}=\left(1-\frac{4}{3}a\right)p_n+\frac{a}{3}\ \cdots\ ①\qquad\leftarrow（答）$$

ここに、$p_1=1-a$ である。

(2) ①において　p_n と p_{n+1} に形式的に同じ α を代入した式：

$$\alpha=\left(1-\frac{4}{3}a\right)\alpha+\frac{a}{3}\ \cdots\ ②$$

［これを①の特性方程式という］　これより $\alpha=\dfrac{1}{4}$

①－②より

$$p_{n+1}-\frac{1}{4}=\left(1-\frac{4}{3}a\right)\left(p_n-\frac{1}{4}\right)$$

これより数列 $\left\{p_n-\dfrac{1}{4}\right\}$ は初項 $p_1-\dfrac{1}{4}=1-a-\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{4}-a$, 公比 $1-\dfrac{4}{3}a$ の等比数列。

$$従って\quad p_n-\frac{1}{4}=\left(\frac{3}{4}-a\right)\left(1-\frac{4}{3}a\right)^{n-1}$$

$$p_n=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\left(1-\frac{4}{3}a\right)\left(1-\frac{4}{3}a\right)^{n-1}$$

$$\therefore\ p_n=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\left(1-\frac{4}{3}a\right)^{n}\qquad\leftarrow（答）$$